

SL Proof Exercises

(Note: These arguments are not my own.)

1. $P, P \rightarrow Q, Q \rightarrow R, R \rightarrow S \therefore S$
2. $P \rightarrow Q, Q \rightarrow R, R \rightarrow S, \neg S \therefore \neg P$
3. $\neg P \vee Q, \neg Q, P \vee R \therefore R$
4. $P \vee Q, \neg P, Q \rightarrow R \therefore R$
5. $P, P \rightarrow \neg Q, R \rightarrow Q, \neg R \rightarrow S \therefore S$
6. $P \vee \neg Q, \neg P, R \rightarrow Q, \neg R \rightarrow S \therefore S$
7. $(P \rightarrow Q) \rightarrow P, P \rightarrow Q \therefore Q$
8. $(P \rightarrow Q) \rightarrow R, R \rightarrow P, P \rightarrow Q \therefore Q$
9. $(P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow R), P \rightarrow Q, P \therefore R$
10. $\neg P \rightarrow Q, \neg Q, R \vee \neg P \therefore R$
11. $\neg P \rightarrow (\neg Q \vee R), P \rightarrow R, \neg R \therefore \neg Q$
12. $P \rightarrow \neg Q, \neg S \rightarrow P, \neg \neg Q \therefore \neg \neg S$
13. $P \vee Q, Q \rightarrow R, \neg R \therefore P$
14. $\neg P \rightarrow (Q \vee R), P \rightarrow Q, \neg Q \therefore R$
15. $P \rightarrow R, \neg P \rightarrow (S \vee R), \neg R \therefore S$
16. $P \vee \neg Q, \neg R \rightarrow \neg \neg Q, R \rightarrow \neg S, \neg \neg S \therefore P$
17. $(P \rightarrow Q) \vee (R \rightarrow S), (P \rightarrow Q) \rightarrow R, \neg R \therefore R \rightarrow S$
18. $(P \rightarrow Q) \rightarrow (R \rightarrow S), (R \rightarrow T) \vee (P \rightarrow Q), \neg(R \rightarrow T) \therefore R \rightarrow S$
19. $\neg R \rightarrow (P \vee Q), R \rightarrow P, (R \rightarrow P) \rightarrow \neg P \therefore Q$
20. $(P \rightarrow Q) \vee R, [(P \rightarrow Q) \vee R] \rightarrow \neg R, (P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow R) \therefore \neg Q$
21. $P \& Q, P \rightarrow (R \& S) \therefore Q \& S$
22. $P \& Q, (P \vee R) \rightarrow S \therefore P \& S$
23. $P, (P \vee Q) \rightarrow (R \& S), (R \vee T) \rightarrow U \therefore U$
24. $P \rightarrow Q, P \vee R, \neg Q \therefore R \& \neg P$
25. $P \rightarrow Q, \neg R \rightarrow (Q \rightarrow S), R \rightarrow T, \neg T \& P \therefore Q \& S$
26. $P \rightarrow Q, R \vee \neg Q, \neg R \& S, (\neg P \& S) \rightarrow T \therefore T$
27. $P \vee \neg Q, \neg R \rightarrow Q, R \rightarrow \neg S, S \therefore P$
28. $P \& Q, (P \vee T) \rightarrow R, S \rightarrow \neg R \therefore \neg S$
29. $P \& Q, P \rightarrow R, (P \& R) \rightarrow S \therefore Q \& S$
30. $P \rightarrow Q, Q \vee R, (R \& \neg P) \rightarrow S, \neg Q \therefore S$
31. $P \& Q \therefore Q \& P$
32. $P \& (Q \& R) \therefore (P \& Q) \& R$
33. $P \therefore P \& P$
34. $P \therefore P \& (P \vee Q)$
35. $P \& \neg P \therefore Q$
36. $P \leftrightarrow \neg Q, Q, P \leftrightarrow \neg S \therefore S$
37. $P \& \neg Q, Q \vee (P \rightarrow S), (R \& T) \leftrightarrow S \therefore P \& R$
38. $P \rightarrow Q, (P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow P), (P \leftrightarrow Q) \rightarrow P \therefore P \& Q$
39. $\neg P \& Q, (R \vee Q) \rightarrow (\neg S \rightarrow P), \neg S \leftrightarrow T \therefore \neg T$
40. $P \& \neg Q, Q \vee (R \rightarrow S), \neg V \rightarrow \neg P, V \rightarrow (S \rightarrow R), (R \leftrightarrow S) \rightarrow T,$
41. $U \leftrightarrow (\neg Q \& T) \therefore U$
42. $(P \vee Q) \rightarrow R \therefore Q \rightarrow R$
43. $Q \rightarrow R \therefore (P \& Q) \rightarrow (P \& R)$

44. $P \rightarrow Q \therefore (Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R)$
45. $P \rightarrow Q \therefore (R \rightarrow P) \rightarrow (R \rightarrow Q)$
46. $(P \& Q) \rightarrow R \therefore P \rightarrow (Q \rightarrow R)$
47. $P \rightarrow (Q \rightarrow R) \therefore (P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)$
48. $(P \& Q) \rightarrow R \therefore [(P \rightarrow Q) \rightarrow P] \rightarrow [(P \rightarrow Q) \rightarrow R]$
49. $(P \& Q) \rightarrow (R \rightarrow S) \therefore (P \rightarrow Q) \rightarrow [(P \& R) \rightarrow S]$
50. $[(P \& Q) \& R] \rightarrow S \therefore P \rightarrow [Q \rightarrow (R \rightarrow S)]$
51. $(\neg P \& Q) \rightarrow R \therefore (\neg Q \rightarrow P) \rightarrow (\neg P \rightarrow R)$
52. $P \rightarrow Q, P \rightarrow \neg Q \therefore \neg P$
53. $P \rightarrow Q, Q \rightarrow \neg P \therefore \neg P$
54. $P \rightarrow Q, \neg Q \vee \neg R, P \rightarrow R \therefore \neg P$
55. $P \rightarrow R, Q \rightarrow \neg R \therefore \neg(P \& Q)$
56. $P \& Q \therefore \neg(P \rightarrow \neg Q)$
57. $P \& \neg Q \therefore \neg(P \rightarrow Q)$
58. $\neg P \therefore \neg(P \& Q)$
59. $\neg P \& \neg Q \therefore \neg(P \vee Q)$
60. $P \leftrightarrow Q, \neg Q \therefore \neg(P \vee Q)$
61. $P \& Q \therefore \neg(\neg P \vee \neg Q)$
62. $\neg P \vee \neg Q \therefore \neg(P \& Q)$
63. $P \vee Q \therefore \neg(\neg P \& \neg Q)$
64. $P \rightarrow Q \therefore \neg(P \& \neg Q)$
65. $P \rightarrow (Q \rightarrow \neg P) \therefore P \rightarrow \neg Q$
66. $(P \& Q) \rightarrow R \therefore (P \& \neg R) \rightarrow \neg Q$
67. $(P \& Q) \rightarrow \neg R \therefore P \rightarrow \neg(Q \& R)$
68. $P \rightarrow (Q \rightarrow R) \therefore (Q \& \neg R) \rightarrow \neg P$
69. $P \rightarrow \neg(Q \& R) \therefore (P \& Q) \rightarrow \neg R$
70. $P \rightarrow \neg(Q \& R) \therefore (P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow \neg R)$
71. $P \rightarrow (Q \rightarrow R) \therefore (P \rightarrow \neg R) \rightarrow (P \rightarrow \neg Q)$
72. $P \rightarrow Q, \neg P \rightarrow Q \therefore Q$
73. $P \vee Q, P \rightarrow R, Q \vee \neg R \therefore R$
74. $\neg P \rightarrow R, Q \rightarrow R, P \rightarrow Q \therefore R$
75. $(P \vee \neg Q) \rightarrow (R \& \neg S), Q \vee S \therefore R$
76. $(P \vee Q) \rightarrow (R \rightarrow S), (\neg S \vee T) \rightarrow (P \& R) \therefore S$
77. $\neg(P \& \neg Q) \therefore P \rightarrow Q$
78. $P \rightarrow (\neg Q \rightarrow R) \therefore (P \& \neg R) \rightarrow Q$
79. $P \& (Q \vee R) \therefore \neg(P \& Q) \rightarrow R$
80. $P \vee Q \therefore Q \vee P$
81. $\neg P \rightarrow Q \therefore P \vee Q$
82. $\neg(P \& Q) \therefore \neg P \vee \neg Q$
83. $P \rightarrow Q \therefore \neg P \vee Q$
84. $P \vee Q, P \rightarrow R, Q \rightarrow S \therefore R \vee S$
85. $\neg P \rightarrow Q, P \rightarrow R \therefore Q \vee R$
86. $\neg P \rightarrow Q, \neg R \rightarrow S, \neg Q \vee \neg S \therefore P \vee R$
87. $(P \& \neg Q) \rightarrow R \therefore P \rightarrow (Q \vee R)$
88. $\neg P \rightarrow (\neg Q \vee R) \therefore Q \rightarrow (P \vee R)$
89. $P \& (Q \vee R) \therefore (P \& Q) \vee R$
90. $(P \vee Q) \& (P \vee R) \therefore P \vee (Q \& R)$

91. $(P \vee Q) \rightarrow (P \& Q) \therefore (P \& Q) \vee (\neg P \& \neg Q)$
92. $P \rightarrow (Q \& R) \therefore (P \rightarrow Q) \& (P \rightarrow R)$
93. $(P \vee Q) \rightarrow R \therefore (P \rightarrow R) \& (Q \rightarrow R)$
94. $(P \vee Q) \rightarrow (P \& Q) \therefore P \leftrightarrow Q$
95. $P \leftrightarrow Q \therefore Q \leftrightarrow P$
96. $P \leftrightarrow Q \therefore \neg P \leftrightarrow \neg Q$
97. $P \leftrightarrow Q, Q \rightarrow \neg P \therefore \neg P \& \neg Q$
98. $(P \rightarrow Q) \vee (\neg Q \rightarrow R) \therefore P \rightarrow (Q \vee R)$
99. $P \vee Q, P \rightarrow \neg Q \therefore (P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \& \neg P)$
100. $P \vee Q, \neg(P \& Q) \therefore (P \rightarrow Q) \rightarrow \neg(Q \rightarrow P)$
101. $P \vee Q, P \rightarrow \neg Q \therefore (P \& \neg Q) \vee (Q \& \neg P)$
102. $(P \vee Q) \rightarrow (P \& Q) \therefore (\neg P \vee \neg Q) \rightarrow (\neg P \& \neg Q)$
103. $P \& (Q \vee R) \therefore (P \& Q) \vee (P \& R)$
104. $(P \& Q) \vee (P \& R) \therefore P \& (Q \vee R)$
105. $P \vee (Q \& R) \therefore (P \vee Q) \& (P \vee R)$
106. $(P \& Q) \vee [(P \& R) \vee (Q \& R)] \therefore P \vee (Q \& R)$
107. $P \vee Q, P \vee R, Q \vee R \therefore [P \& Q] \vee [(P \& R) \vee (Q \& R)]$
108. $(P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R) \therefore P \rightarrow (Q \vee R)$
109. $(P \rightarrow R) \vee (Q \rightarrow R) \therefore (P \& Q) \rightarrow R$
110. $P \leftrightarrow (Q \& \neg P) \therefore \neg(P \vee Q)$
111. $(P \& Q) \vee (\neg P \& \neg Q) \therefore P \leftrightarrow Q$
112. $P \rightarrow (Q \vee R) \therefore (P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R)$
113. $(P \leftrightarrow Q) \rightarrow R \therefore P \rightarrow (Q \rightarrow R)$
114. $P \rightarrow (\neg Q \rightarrow R) \therefore \neg(P \rightarrow R) \rightarrow Q$
115. $(P \& Q) \rightarrow R \therefore (P \rightarrow R) \vee (Q \rightarrow R)$
116. $P \leftrightarrow \neg Q \therefore (P \& \neg Q) \vee (Q \& \neg P)$
117. $(P \rightarrow \neg Q) \rightarrow R \therefore \neg(P \& Q) \rightarrow R$
118. $P \leftrightarrow (Q \& \neg P) \therefore \neg P \& \neg Q$
119. $P \therefore (P \& Q) \vee (P \& \neg Q)$
120. $P \leftrightarrow \neg P \therefore Q$
121. $(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow R \therefore P \leftrightarrow (Q \leftrightarrow R)$